

ベンチマーク問題（解析解）

線形分散波理論による 2 次元水平床上の津波伝播

解析解の概要

2 次元の線形分散波理論（線形 Boussinesq 式）で水平床を仮定し，線流量を消去すると以下の波動方程式が導かれる．

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

式 (1) を支配方程式として，初期条件¹が

$$\eta = 2e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad (2)$$

とした場合の解析解は，Carrier[1] により導出されている．式 (1) を極座標系に変換し，時間に関するフーリエ・コサイン変換を利用することで式 (3) のように求められる．

$$\eta = \int_0^\infty k' e^{-\frac{k'^2 r'^2}{4}} J_0(k' r') \cos \left(\frac{k' t'}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(k' h')^2}} \right) dk' \quad (3)$$

ここで， J_0 は 0 次の第 1 種 Bessel 関数であり，式 (2)，(3) 中の変数は以下のように無次元化されている．

$$h' = \frac{h}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad k' = ak, \quad t' = \frac{\sqrt{gh}}{a} t \quad (4)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (5)$$

この解の物理的な特徴を以下に示す．

- xy 平面について軸対称であり，波は同心円上に伝播する．
- 初期水位で与えるのが隆起 (正) であっても，負の水位が出現する．
- 波源から遠ざかるに従い，振幅が² $r^{-1/2}$ で小さくなる．
- 式中の $\sqrt{1 + \frac{1}{3}(k' h')^2}$ は Boussinesq 型の波速を意味する．この項を 1 とした場合，線形長波理論の解と一致する．

¹ a は Gauss 分布の波形勾配のパラメータであり，軸上の頂点の $1/e$ となる場所の半径を意味する． a が大きい程波形が緩やかになる．

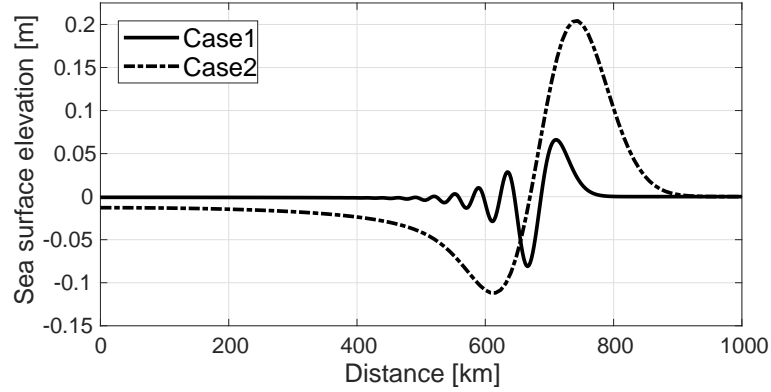


図 1: 解析解による津波水位波形 ($t = 3600s$)

表 1: 数値モデルの計算条件

Name	$\Delta x[m]$	$\Delta t[s]$	重力加速度 $[m/s^2]$	空間グリッド数	時間ステップ数	$L/\Delta x$
Case 1	2000	2	9.80665	1001×1001	1800	43
Case 2	2000	2	9.80665	1001×1001	1800	172

ベンチマークの設定条件と提供データ

本ベンチマークで提供するデータは以下の条件で求めた²。

- (A) 静水深 $h = 4,000$ m の 2 次元水平床上を伝播。
- (B) 初期波形の条件として Case1 : $a = 20$ km ($L = 85.8$ km) , Case2 : $a = 80$ km ($L = 343$ km) の 2 種類を設定。
- (C) 時刻 $t = 3,600$ s における津波水位の空間波形を出力。データは有次元。
- (D) 式 (3) の計算には数学ソフトウェア (Mathematica10.3) を利用した。

公開データ「analyticalsolution_case1a20t3600.txt」と「analyticalsolution_case2a80t3600.txt」は、それぞれ上記の条件で求めた Case1, Case2 の解析解である。ファイルはテキスト形式であり、データの 1 列目を座標原点からの距離 [km], 2 列目を水位 [m] とした。両者をプロットしたグラフを図 1 に示す。Case1 では分裂した後続波が生じており、数値計算による再現には線形分散波理論が必要となる。Case2 は初期波形が緩やかでかつ波長の大きいケースであるため後続波は生じない。そのため、線形長波理論でも再現可能である。

² L は有効波長と定義し、初期波形のエネルギーの 99% を含む距離（もしくは、Gauss 分布のピーク値が 1% まで減少する距離）とした。

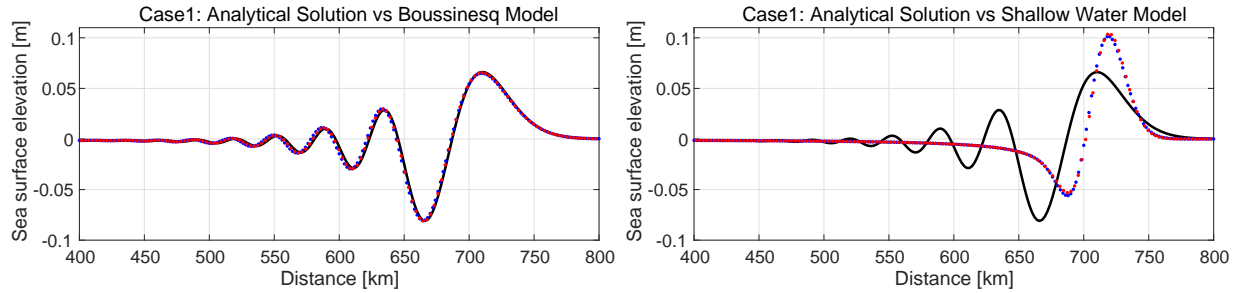


図 2: Case1 での解析解と数値解（左：線形分散波理論，右：線形長波理論）の比較．図中の実線は解析解，青色ドットは x, y 軸方向の数値解，赤色ドットは 45 度方向の数値解を示している．

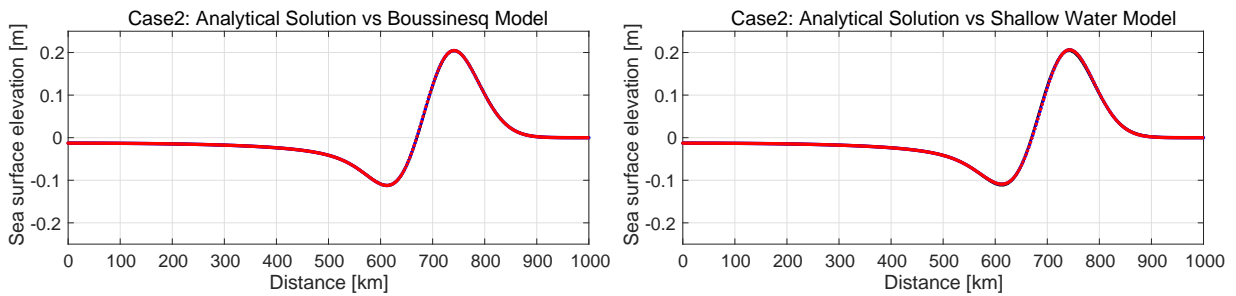


図 3: Case2 での解析解と数値解（左：線形分散波理論，右：線形長波理論）の比較．詳細は図 2 と同様．

ベンチマークの適用例

ベンチマークの適用例として，Shigihara & Fujima[2] の線形分散波理論モデル（Boussinesq 型の分散項）と Goto et al.[3] の線形長波理論モデルを用いた数値計算を行い，解析解と比較した．計算条件を表 1 のように設定し，両モデルともに同一の条件とした³．空間領域の中心位置を座標原点（ $x = y = 0$ ）とし，ガウス分布の中心が座標原点に一致するように初期水位を配置した．境界条件は領域の外側にスポンジ層を設けた．海底摩擦とコリオリ力は考慮していない．

得られた数値解と解析解の比較を図 2 と図 3 に示す．Case1 について，線形分散波理論による数値解は主峰および後続の分散波列解析解と良好に一致しているが，線形長波理論では再現できていない．一方，Case2 は線形長波理論で再現可能な条件であるため，いずれの数値解も解析解と一致する．

その他

データセット中の Fortran90 ファイル「initgaussian.f90」を実行することで，各ケースの初期水位を計算することができます（テキスト形式）．また，matlab スクリプトファイル「mkfig1.m」と「mkfig2left.m」を実行することで，図 1 と図 2（左側）を作成することが可能です．

³ 支配方程式は非線形モデルを選択しても良い．波高水深比が 1 のオーダーよりも十分小さく，非線形項の効果が表れないためである．

参考文献

- [1] Carrier, G. F., “Tsunami propagation from a finite source”, in Proc. 2nd UJNR Tsunami Workshop, NGDC, Hawaii, pp.101-115, 1991.
- [2] Shigihara, Y. & Fujima, K.: An adequate dispersive wave scheme for tsunami simulation, Coast. Eng. J., 56, 1450003 [32 pages], doi: 10.1142/S057856341450003X, 2014.
- [3] Goto, C., Ogawa, Y., Shuto, N., and Imamura, F.: IUGG/IOC TIME Project, Numerical method of tsunami simulation with the Leap-frog scheme, UNESCO, pp.126, 1997.